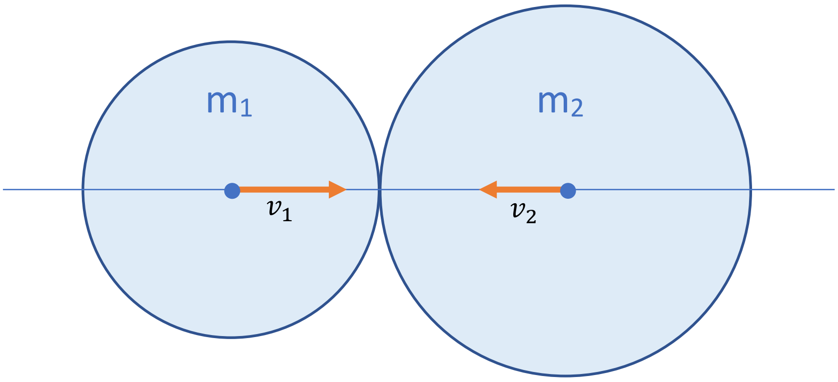
Der elastische Stoß

Herleitung der Formeln für den dezentralen Stoß unterschiedlicher Massen

Betrachtet wird der elastische Stoß zweier Kugeln mit unterschiedlichen Massen in der Ebene, also zweidimensional. In einem ersten Schritt wird der Spezialfall des **zentralen Stoßes** behandelt. Die dabei gewonnenen Ergebnisse fließen in den zweiten Schritt, die Behandlung des **dezentralen Stoßes**, ein.

1. Zentraler Stoß

Zwei Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 stoßen mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zusammen. Ihre Mittelpunkte bewegen sich auf einer gemeinsamen waagerechten Linie. Ein negatives Vorzeichen von v_1 bzw. v_2 bedeutet, dass sich die Kugel nach links bewegt.



Impulserhaltungssatz und Energieerhaltungssatz liefern die beiden Gleichungen:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Die erste Gleichung wird umgeformt zu

$$m_1 (v_1 - \mathrm{u}_1) = m_2 (u_2 - \mathrm{v}_2)$$

und die zweite Gleichung zu

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) \quad \Leftrightarrow \quad m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2)\,.$$

Substitution des Terms $m_2 (u_2 - v_2)$ vereinfacht die letzte Gleichung zu $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$.

Für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß erhält man schließlich:

$$u_1 = \frac{\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} v_1 + \frac{2\mathrm{m}_2}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} v_2 \qquad (1)$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \qquad (2)$$

Für den **Spezialfall $m_1 = m_2$** ergibt sich daraus:

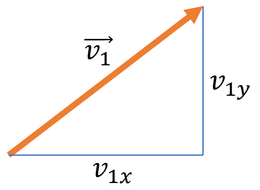
$$u_1 = v_2$$

$$u_2 = v_1$$

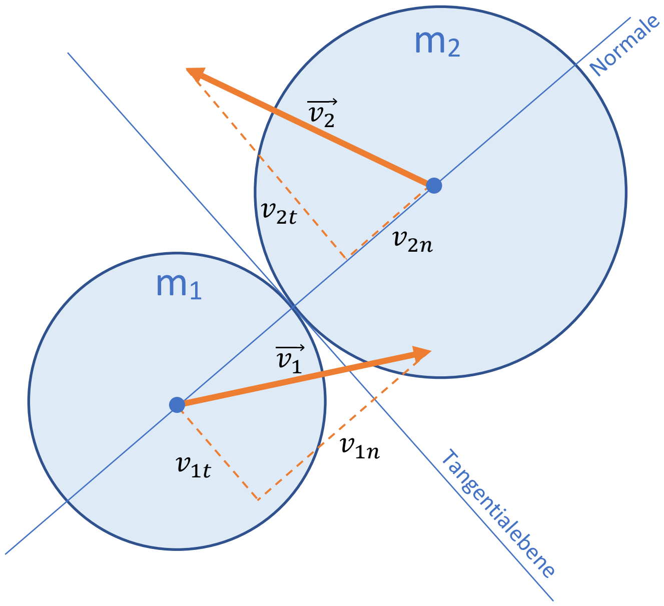
Die Geschwindigkeiten werden einfach nur ausgetauscht.

2. Dezentraler Stoß

Beim dezentralen Stoß werden an Stelle von v_1 und v_2 die Vektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ betrachtet. Die x- bzw. y-Komponenten dieser Vektoren werden im Folgenden mit v_{1x}, v_{1y}, v_{2x} und v_{2y} bezeichnet.

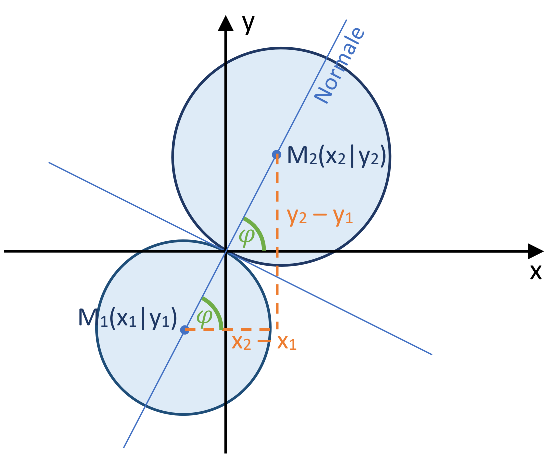


Stoßen zwei Kugeln dezentral aneinander, so gibt es eine Tangentialebene durch den Berührungspunkt (im Zweidimensionalen eine Gerade) und eine Normale senkrecht zur Tangentialebene, die durch beide Kugelmittelpunkte verläuft.



Die entscheidende physikalische Tatsache ist nun, dass ein Energieaustausch der beiden Kugeln nur in Richtung der Normale erfolgt. Das heißt, die Tangentialkomponenten v_{1t} und v_{2t} bleiben unverändert, die Normalkomponenten v_{1n} und v_{2n} dagegen verändern sich gemäß den Gesetzen des zentralen Stoßes – siehe Kap. 1.

Im Folgenden wird eine Berechnung gewählt, die auf Vektoren, Skalarprodukt und Koordinatentransformationen verzichtet. Damit es für möglichst viele nachvollziehbar ist, wird nur elementare Trigonometrie verwendet.



Als erstes wird der Winkel φ bestimmt, den die Normale mit der x-Achse bildet:

$$\varphi = \arctan\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (3)$$

Dieser Winkel wird im Weiteren als bekannt angesehen. Er wird in allen vier Lösungsformeln mehrfach enthalten sein (siehe Seite 5 unten).

Das Ziel:
Wir suchen Formeln zur Berechnung der x- und y-Komponenten der neuen Geschwindigkeiten, also u_{1x}, u_{1y}, u_{2x} und u_{2y}.

Gegebene Größen:
Bekannt sind die Geschwindigkeitskomponenten vor dem Stoß v_{1x}, v_{1y}, v_{2x} und v_{2y} sowie der Winkel φ.

2.1 Lösungsansatz

$$u_{1x} = v_{1tx} + v_{1nx,neu} \tag{4}$$

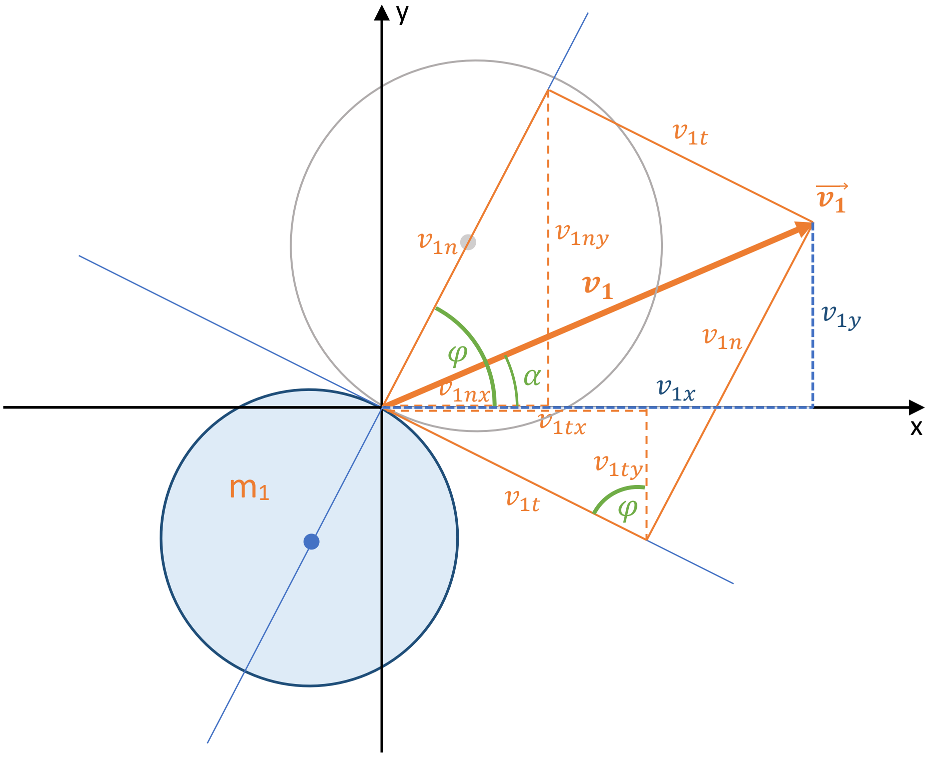
$$u_{1y} = v_{1ty} + v_{1ny,neu} \tag{5}$$

$$u_{2x} = v_{2tx} + v_{2nx,neu} \tag{6}$$

$$u_{2y} = v_{2ty} + v_{2ny,neu} \tag{7}$$

Die Tangentialkomponenten bleiben unverändert, die Normalkomponenten werden neu berechnet.

Die folgende Abbildung zeigt am Beispiel der 1. Kugel (mit der Masse m_1), wie die Tangential- und Normalkomponenten v_{1t} *und* v_{1n} weiter in ihre x- und y-Komponenten $v_{1tx}, v_{1ty}, v_{1nx}$ *und* v_{1ny} zerlegt werden. Für die 2. Kugel gelten dieselben Ergebnisse - nur jeweils mit dem Index 2.



2.2 Vorbereitende Gleichungen

Aus der obigen Abbildung entnimmt man:

$$v_{1x} = v_1 \cdot \cos\alpha \tag{8}$$

$$v_{1y} = v_1 \cdot \sin\alpha \tag{9}$$

Als nächstes werden die Tangential- und die Normalkomponente in ihre x- und y-Komponenten zerlegt.

Tangentialkomponente:

$$v_{1t} = v_1 \cdot \sin(\varphi - \alpha)$$

Anwendung des Additionstheorems der Trigonometrie ergibt:

$$v_{1t} = v_1 \cdot (\sin\varphi \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\varphi)$$

$$v_{1t} = v_1 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha - v_1 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi$$

Mit den Gleichungen (8) und (9) folgt daraus:

$$v_{1t} = v_{1x} \cdot \sin\varphi - v_{1y} \cdot \cos\varphi \tag{10}$$

Normalkomponente:

$$v_{1n} = v_1 \cdot \cos(\varphi - \alpha)$$

Anwendung des Additionstheorems der Trigonometrie ergibt:

$$v_{1n} = v_1 \cdot (\cos\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\varphi \cdot \sin\alpha)$$

$$v_{1n} = v_1 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\alpha + v_1 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha$$

Mit den Gleichungen (8) und (9) folgt daraus:

$$v_{1\mathrm{n}} = v_{1x} \cdot \cos\varphi + v_{1y} \cdot \sin\varphi \tag{11}$$

x-Komponente der Tangentialkomponente:

$$v_{1tx} = v_{1t} \cdot \sin\varphi$$

Substitution mit Hilfe von Gleichung (10) ergibt:

$$v_{1tx} = (v_{1x} \cdot \sin\varphi - v_{1y} \cdot \cos\varphi) \cdot \sin\varphi \tag{12}$$

y-Komponente der Tangentialkomponente:

$$v_{1ty} = -v_{1t} \cdot \cos\varphi$$

Das Minuszeichen der letzten Formel erzeugt bei manchem ein Fragezeichen. Man sieht in der obigen Zeichnung, dass für Winkel $\varphi < \frac{\pi}{2}$ die y-Komponente v_{1ty} negativ sein muss. Eigentlich muss man hier mit Hilfe einer Fallunterscheidung nachweisen, dass sich für jeden Winkel φ das richtige Vorzeichen ergibt.

Substitution mit Hilfe von Gleichung (10) ergibt:

$$v_{1ty} = (-v_{1x} \cdot \sin\varphi + v_{1y} \cdot \cos\varphi) \cdot \cos\varphi \tag{13}$$

x-Komponente der Normalkomponente:

$$v_{1nx} = v_{1n} \cdot \cos\varphi$$

Substitution mit Hilfe von Gleichung (11) ergibt:

$$v_{1nx} = (v_{1x} \cdot \cos\varphi - v_{1y} \cdot \sin\varphi) \cdot \cos\varphi \tag{14}$$

y-Komponente der Normalkomponente:

$$v_{1ny} = v_{1n} \cdot \sin\varphi$$

Substitution mit Hilfe von Gleichung (11) ergibt:

$$v_{1ny} = (v_{1x} \cdot \cos\varphi - v_{1y} \cdot \sin\varphi) \cdot \sin\varphi \tag{15}$$

2.3 Lösung

In den Gleichungen (4), (5), (6) und (7) des Lösungsansatzes besteht die rechte Seite immer aus zwei Summanden. Der erste stellt jeweils die unveränderte Tangentialkomponente dar und ist in Kap. 2.2 berechnet worden – siehe Gleichungen (12) – (15).

Der zweite stellt jeweils die neu zu berechnende Normalkomponente dar. Das Ergebnis für den zweiten Summanden erhält man, indem man die Gesetze des zentralen Stoßes, also die Gleichungen (1) und (2), auf die Normalkomponenten anwendet:

$$v_{1\mathrm{nx,neu}} = \frac{\mathrm{m_1}-\mathrm{m_2}}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} v_{1\mathrm{nx}} + \frac{2\mathrm{m_2}}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} v_{2\mathrm{nx}}$$

Substitution von $v_{1\mathrm{nx}}$ und $v_{2\mathrm{nx}}$ mit Hilfe von Gleichung (14) und vereinfachen führt zu:

$$v_{1\mathrm{nx,neu}} = \frac{(\mathrm{m_1}-\mathrm{m_2})(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi) + 2m_2(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi)}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} \cdot \cos\varphi \qquad (16)$$

$$v_{1\mathrm{ny,neu}} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_{1\mathrm{ny}} + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} v_{2\mathrm{ny}}$$

Substitution von $v_{1\mathrm{ny}}$ und $v_{2\mathrm{ny}}$ mit Hilfe von Gleichung (15) und vereinfachen führt zu:

$$v_{1\mathrm{ny,neu}} = \frac{(\mathrm{m_1}-\mathrm{m_2})(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi) + 2m_2(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi)}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} \cdot \sin\varphi \qquad (17)$$

Die Ergebnisse für $v_{2\mathrm{nx,neu}}$ und $v_{2\mathrm{ny,neu}}$ erhält man, indem man in den Gleichungen (16) und (17) konsequent alle Indizes verändert – aus Index 1 wird Index 2 und umgekehrt:

$$v_{2\mathrm{nx,neu}} = \frac{(\mathrm{m_2}-\mathrm{m_1})(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi) + 2m_1(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi)}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} \cdot \cos\varphi \qquad (18)$$

$$v_{2\mathrm{ny,neu}} = \frac{(\mathrm{m_2}-\mathrm{m_1})(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi) + 2m_1(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi)}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} \cdot \sin\varphi \qquad (19)$$

In die Gleichungen (4) – (7) können nun die berechneten Terme eingesetzt werden. In die Gleichung (4) werden beispielsweise die Terme aus den Gleichungen (12) und (16) eingesetzt. Es ergeben sich die folgenden **Lösungsformeln**:

$$u_{1x} = \left(v_{1x}\cdot\sin\varphi - v_{1y}\cdot\cos\varphi\right)\cdot\sin\varphi + \frac{(\mathrm{m_1}-\mathrm{m_2})(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi) + 2m_2(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi)}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} \cdot \cos\varphi$$

$$u_{1y} = \left(-v_{1x}\cdot\sin\varphi + v_{1y}\cdot\cos\varphi\right)\cdot\cos\varphi + \frac{(\mathrm{m_1}-\mathrm{m_2})(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi) + 2m_2(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi)}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} \cdot \sin\varphi$$

$$u_{2x} = \left(v_{2x}\cdot\sin\varphi - v_{2y}\cdot\cos\varphi\right)\cdot\sin\varphi + \frac{(\mathrm{m_2}-\mathrm{m_1})(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi) + 2m_1(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi)}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} \cdot \cos\varphi$$

$$u_{2y} = \left(-v_{2x}\cdot\sin\varphi + v_{2y}\cdot\cos\varphi\right)\cdot\cos\varphi + \frac{(\mathrm{m_2}-\mathrm{m_1})(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi) + 2m_1(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi)}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}} \cdot \sin\varphi$$

Für den **Spezialfall $m_1 = m_2$** ergibt sich daraus:

$$u_{1x} = (v_{1x}\sin\varphi - v_{1y}\cos\varphi)\cdot\sin\varphi + \left(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi\right)\cdot\cos\varphi$$

$$u_{1y} = (-v_{1x}\sin\varphi + v_{1y}\cos\varphi)\cos\varphi + \left(v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi\right)\cdot\sin\varphi$$

$$u_{2x} = (v_{2x}\sin\varphi - v_{2y}\cos\varphi)\cdot\sin\varphi + \left(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi\right)\cdot\cos\varphi$$

$$u_{2y} = (-v_{2x}\sin\varphi + v_{2y}\cos\varphi)\cos\varphi + \left(v_{1x}\cos\varphi + v_{1y}\sin\varphi\right)\cdot\sin\varphi$$

2.4 Zusatzbemerkungen

Die Herleitung dieser Formeln ist in der Absicht entstanden, sie in einer (zweidimensionalen) Javascript-Simulation mit mehreren Kugeln anzuwenden → https://hermann-baum.de/bouncing-balls.

Wer nur einen **einzelnen elastischen Stoß** betrachtet, hat natürlich die Möglichkeit, die beiden Kugelmittelpunkte auf die x-Achse zu legen, so dass der Winkel φ = 0 wird.

Dann bleiben die Geschwindigkeitskomponenten in y-Richtung unverändert, und die Lösungsformeln im gelben Rahmen auf der vorigen Seite vereinfachen sich zu:

$$u_{1x} = \frac{(\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} \tag{20}$$

$$u_{1y} = v_{1y} \tag{21}$$

$$u_{2x} = \frac{(\mathrm{m}_2 - \mathrm{m}_1)v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} \tag{22}$$

$$u_{2y} = v_{2y} \tag{23}$$

Die Formeln für die x-Komponenten sind identisch mit den Formeln (1) und (2) des zentralen elastischen Stoßes – siehe Kap. 1.

Für eine **alternative Herleitung der Formeln** im Fall φ > 0 kann man die gegebenen Geschwindigkeitskomponenten v_{1x}, v_{1y}, v_{2x} und v_{2y} auch mit Hilfe einer Koordinatentransformation in ein um den Winkel φ gedrehtes Koordinatensystem transformieren, in dem gedrehten Koordinatensystem dann die vereinfachten Formeln (20) bis (23) anwenden und die Ergebnisse wieder zurücktransformieren ins ursprüngliche Koordinatensystem.

Für die Transformation ins gedrehte Koordinatensystem verwendet man die Gleichungen:

$$x' = \mathrm{x} \cdot \cos\varphi + \mathrm{y} \cdot \sin\varphi$$

$$y' = -\mathrm{x} \cdot \sin\varphi + \mathrm{y} \cdot \cos\varphi$$

Für die Rücktransformation gelten die Gleichungen:

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}' \cdot \cos\varphi - \mathrm{y}' \cdot \sin\varphi$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{x}' \cdot \sin\varphi + \mathrm{y}' \cdot \cos\varphi$$

Man erhält dieselben Lösungsformeln. Der Rechenaufwand ist ungefähr gleich groß.